Übungsklausur für Mathematik 12.2

(W a h r s c h e i n l i c h k e i t s r e c h n u n g)

Schwierigkeitsgrad:

Aufgaben 1 – 4: Sehr leicht
Aufgaben 5 – 8: Standart
Aufgabe 9: Schwer
Aufgabe 10: Extrem schwer

1. Berechne P mit der Bernoulli-Formel:
   a) $n = 4$; $p = 0{,}12$; $k = 0$
   b) $n = 17$; $p = 0{,}5$; $k = 3$
   c) $n = 25$; $p = 79\%$; $k = 6$
   d) $n = 100$; $p = 0{,}001$; $k = 1$
2. Berechne P unter der Benutzung der Tabelle:
   a) $n = 10$; $p = 0{,}3$; $k = 9$
   b) $n = 25$; $p = 0{,}5$; $k = 12$
   c) $n = 100$; $p = 0{,}9$; $k = 60$
3. Berechne das gegebene Intervall mithilfe der Tabelle:
   a) $n = 25$; $p = \frac{1}{3}$; $20 \le x \le 30$
   b) $n = 50$; $p = \frac{1}{2}$; $15 \le x \le 30$
   c) $n = 100$; $p = 86\%$; $x \le 60$
4. Untersuche folgende Binominalverteilungen. Bestimme dabei den Erwartungswert E(x), sowie das Maximum und die Standartabweichung σ:
   a) $n = 100$; $p = 0{,}7$
   b) $n = 1200$; $p = 1/6$
   c) $n = 37$; $p = 0{,}345$
5. In Phantasialand wird es 9,6% der Personen, die mit einer bestimmten Achterbahn fahren, übel. Der Veranstelter möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% wissen, wie vielen Personen es schlecht wird, wenn in eine Achterbahn 200 Leute passen.
6. Zu Fastnacht werden in einer Bäckerei 5% der Kreppel mit Senf und 1% mit extrascharfer Chillisauce gefüllt. Frau Reuther kauft für das Laubach-Kolleg 300 dieser Kreppel. Wie viele Kreppel sind mit einer Sicherheit von 95% mit Senf, wie viele mit Chillisauce gefüllt?
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Mathe-Leistungskurs mindestens einen dieser Kreppel, wenn er 12 Kreppel bestellt?
7. Im Hinterzimmer einer Kneipe wird ein scheinbar lukratives Spiel angeboten. Wer beim 100 fachen Münzwurf weniger als 40 oder mehr als 60 mal Kopf geworfen hat, bekommt den 4 fachen Einsatz zurück. Lohnt das Spiel?
8. Ein Reiseveranstalter plant eine Reise. Erfahrungsgemäß fahren 8% von denen, die eine Reise gebucht haben nicht mit. Wie viele Plätze muss der Reiseveranstalter mindestens anbieten, damit mit einer Sicherheit von 99% zu erwarten ist, dass von 100 angemeldeten Personen zwischen 91 und 93 mitfahren.
9. Wie oft muss man eine Münze werfen, damit man mit 99%iger Sicherheit nicht mehr als 1% vom Erwartungswert entfernt liegt?
10. Kain und Abel werfen je 100 mal eine Münze. Kain multipliziert die Anzahl seiner Köpfe mit 50. Abel quadriert die Anzahl seiner Köpfe. Schätze grob ab, ob das Spiel fair ist. Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit der Beiden mit einem 4 fachen Münzwurf und dem Faktor 2 für Kains Ergebnis Bewerte das Spiel erneut!

Lösungen

Nr. 1

a) $P = 59{,}97\%$ b) $P = 0{,}52\%$ c) $P = 5{,}7 \cdot 10^{-7}\%$ d) $P = 9{,}06\%$

Nr. 2

a) $P = 0{,}014\% \approx 0$ b) $P = 15{,}5\%$ c) $P = 0$

Nr. 3

a) $1 – 1 = 0$ b) $94{,}1\% - 0{,}1\% = 94\%$ c) $1 – 1 = 0$

Nr. 4

a) $E(x) = 70$ $K_{max} = 70$ $\sigma = 4{,}5826$
b) $E(x) = 200$ $K_{max} = 200$ $\sigma = 12{,}91$
c) $E(x) = 12{,}765$ $K_{max} = 13$ $\sigma = 2{,}89$

Nr. 5

Ausführliche Darstellung zum Lösen dieses Aufgabentyps:
$E(x) = n \cdot p = 200 \cdot 9{,}6\% = 19{,}2$
$\sigma = \sqrt{E(x) \cdot q} = \sqrt{19{,}2 \cdot 90{,}4\%} = 4{,}1661$
99% Umgebung: $2{,}58\ \sigma = 10{,}7487$
$P(\text{"}E(x) – \sigma \leq x \leq E(x) + \sigma\text{"}) = P(\text{"}19{,}2 – 10{,}7487 \leq x \leq 19{,}2 + 10{,}7487\text{"})$
$= P(\text{"}8{,}4513 \leq x \leq 29{,}9487\text{"}) = P(\text{"}9 \leq x \leq 29\text{"}) = 99\%$
A: Mit 99%iger Sicherheit wird es zwischen einschließlich 9 und 29 Personen schlecht.

Nr. 6

Mit 95%iger Sicherheit sind zwischen einschließlich 8 und 22 Kreppel mit Senf gefüllt, zwischen 0 und 6 sind mit Chillisauce gefüllt.
$P = 1 – (1 – (5\% + 1\%))^{12} = 1 – (1 – 6\%)^{12} = 1 – (0{,}94)^{12} = 1 – 0{,}4759 = 52{,}41\%$
Der Mathematikkurs erwischt mit 52,41%iger Wahrscheinlichkeit einen gefakten Kreppel.

Nr. 7

$P(\text{"}x < 40 \vee x > 60\text{"}) = 1 – P(\text{"}40 \leq x \leq 60\text{"}) = 1 – (98{,}2\% - 1{,}8\%) = 1 – 96{,}4\% = 3{,}6\%$
$3{,}6\% \cdot 4 = 14{,}4\% < 1 \rightarrow$ Es lohnt sich nicht.

Nr. 8

99% - Umgebung: $r = 1\% \cdot n$ $r = 2{,}58\ \sigma$
$0{,}01\ n > 2{,}58\ \sigma$
$0{,}01\ n > 2{,}58 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}$
$0{,}01\ n > 2{,}58 \cdot \sqrt{n \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}08}$
$0{,}01\ n > 0{,}7 \cdot \sqrt{n}$
$n > 70 \cdot \sqrt{n}$
$n^2 > 4900n$
$n > 4900$

A: Der Reiseveranstalter muss mehr als 4900 Plätze bereitstellen, damit mit einer Sicherheit von 99% zu erwarten ist, dass zwischen 91% und 93% der gebuchten Reisenden mitfahren.

Nr. 9

Ansatz wie oben: $0{,}01\, n > 2{,}58 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}$
$0{,}01\, n > 2{,}58 \cdot \sqrt{n \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}$
$0{,}01\, n > 1{,}29 \cdot \sqrt{n}$
$n > 129 \cdot \sqrt{n}$
$n^2 > 16641n$
$n > 16641$

A: Man muss eine Münze mindestens 16641 mal werfen, damit das Ergebnis mit 99%iger Sicherheit nicht um mehr als 1% vom erwartungswert abweicht.

Nr. 10

Wenn die x-Achse die Anzahl der Geworfenen Köpfe und die y-Achse die tatsächlich erhaltene Punktzahl ist, so hat Kain eine lineare, Abel eine quadratische Funktion. Sie schneiden sich genau beim erwartungswert. Da eine quadratische Funktion aber schneller steigt, wie eine lineare, ist zu vermuten, dass Abel im Schnitt mehr Punkte bekommt und daher öfter gewinnt.
Würfeln die Beiden nur 4 mal und multipliziert Kain die Anzahl seiner Köpfe mit 2, gibt es in 37* von 256 Fällen unentschieden, in 105* von 256 Fällen gewinnt Kain und in 114* von 256 Fällen gewinnt Abel. Abel gewinnt also öfter als Kain.
Dieses Beispiel hat unsere Vermutung, dass Abel öfter als Kain gewinnt, bestätigt.

*) Um auf die die o.g. Zahlen zu kommen, empfiehlt es sich eine Tabelle (5 • 5) mit allen möglichen Anzahl an Köpfen zu machen und auszurechnen, wer gewinnt und mit welcher Wahrscheinlichkeit.